Übungsaufgabe Kurvendiskussion

gebrochen-rationale Funktion

J. Almer

[1]Ludwig-Thoma-Gymnasium

10. April 2011

Gliederung

1. **Aussagen der Funktion**
   - Nullstellen
   - Extremstellen
   - Grenzwertbetrachtung
   - Graphen zeichnen
   - Tangenfunktion

Aufgabenstellung

Gegeben ist die Funktion $f : f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$; ihr Graph ist G_f

1. Gib die maximale Definitionsmenge D_f und Wertemenge W_f an.

Aufgabenstellung

Gegeben ist die Funktion $f: f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$; ihr Graph ist G_f

1. Gib die maximale Definitionsmenge D_f und Wertemenge W_f an.
2. Untersuche die Funktion auf Nullstellen, Polstellen und Extremstellen (Extrema angeben) sowie auf ihr Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs.
   Geben Sie Gleichungen ihrer Asymptoten an.

Aufgabenstellung

Gegeben ist die Funktion $f: f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$; ihr Graph ist G_f

1. Gib die maximale Definitionsmenge D_f und Wertemenge W_f an.
2. Untersuche die Funktion auf Nullstellen, Polstellen und Extremstellen (Extrema angeben) sowie auf ihr Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs.
   Geben Sie Gleichungen ihrer Asymptoten an.
3. Zeichnen Sie G_f.

Aufgabenstellung

Gegeben ist die Funktion $f : f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$; ihr Graph ist G_f

1. Gib die maximale Definitionsmenge D_f und Wertemenge W_f an.
2. Untersuche die Funktion auf Nullstellen, Polstellen und Extremstellen (Extrema angeben) sowie auf ihr Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs.
   Geben Sie Gleichungen ihrer Asymptoten an.
3. Zeichnen Sie G_f.
4. Bestimmen Sie die Tangentengleichung $t_0(x)$ an der Stelle $x_0 = 3$.

Aufgabenstellung

Gegeben ist die Funktion $f : f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$; ihr Graph ist G_f

1. Gib die maximale Definitionsmenge D_f und Wertemenge W_f an.
2. Untersuche die Funktion auf Nullstellen, Polstellen und Extremstellen (Extrema angeben) sowie auf ihr Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs.
   Geben Sie Gleichungen ihrer Asymptoten an.
3. Zeichnen Sie G_f.
4. Bestimmen Sie die Tangentengleichung $t_0(x)$ an der Stelle $x_0 = 3$.
5. Gibt es eine parallele Tangente des Graphen.

Gliederung

Nullstellen & Definitionsmenge $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$

1. Nullstellen des Zählers
   $x_1 = 1$ doppelte Nullstelle $\rightarrow$

Nullstellen & Definitionsmenge $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$

1. Nullstellen des Zählers
   $x_1 = 1$ doppelte Nullstelle $\rightarrow$ Nullstelle des Graphen ohne Vorzeichenwechsel

Nullstellen & Definitionsmenge $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$

1. Nullstellen des Zählers
   $x_1 = 1$ doppelte Nullstelle $\rightarrow$ Nullstelle des Graphen ohne Vorzeichenwechsel
2. Nullstellen des Zählers
   keine vorhanden $\rightarrow$

Nullstellen & Definitionsmenge $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$

1. Nullstellen des Zählers
   $x_1 = 1$ doppelte Nullstelle $\rightarrow$ Nullstelle des Graphen ohne Vorzeichenwechsel
2. Nullstellen des Zählers
   keine vorhanden $\rightarrow$ keine Polstellen & $D_f = \mathbb{R}$

Nullstellen & Definitionsmenge $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$

1. Nullstellen des Zählers
   $x_1 = 1$ doppelte Nullstelle $\rightarrow$ Nullstelle des Graphen ohne Vorzeichenwechsel
2. Nullstellen des Zählers
   keine vorhanden $\rightarrow$ keine Polstellen & $D_f = \mathbb{R}$
3. Wertemenge machen wir erst nach dem Zeichnen, Extrema!

Gliederung

Ableitungsfunktion von $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$

1. Quotientenregel $\frac{\text{NAZ-ZAN}}{N^2}$

Ableitungsfunktion von $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$

1. Quotientenregel $\frac{\text{NAZ-ZAN}}{\text{N}^2}$
2. $$f'(x) = \frac{2 \cdot 2(x-1) \cdot 1 \cdot (x^2+1) - 2(x-1)^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = 4\frac{x^3+x-x^2-1-(x^2-2x-}{(x^2+1)^2}$$
   $$4\frac{x^3-x^2+x-1-x^3+2x^2-x}{(x^2+1)^2} = 4\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

Ableitungsfunktion von $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$

1. Quotientenregel $\frac{\text{NAZ-ZAN}}{N^2}$
2. $$f'(x) = \frac{2 \cdot 2(x-1) \cdot 1 \cdot (x^2+1) - 2(x-1)^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = 4\frac{x^3 + x - x^2 - 1 - (x^2 - 2x -}{(x^2+1)^2}$$
$$4\frac{x^3 - x^2 + x - 1 - x^3 + 2x^2 - x}{(x^2+1)^2} = 4\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

Quotientenregel

1. Nicht Zähler und Nenner isoliert ableiten!
2. Achte auf das Minus bei der Quotientenregel

Nullstellen der Ableitungsfunktion $f'(x) = 4\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

1. Wichtig sind Nullstellen des Zählers

Nullstellen der Ableitungsfunktion $f'(x) = 4\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

1. Wichtig sind Nullstellen des Zählers
2. $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$

Nullstellen der Ableitungsfunktion $f'(x) = 4\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

1. Wichtig sind Nullstellen des Zählers
2. $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$
3. $x_{2/3} = \pm 1$, jeweils einfach $\rightarrow$

Nullstellen der Ableitungsfunktion $f'(x) = 4\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

1. Wichtig sind Nullstellen des Zählers
2. $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$
3. $x_{2/3} = \pm 1$, jeweils einfach $\rightarrow$ Vorzeichenwechsel und damit Extremum jeweils $\rightarrow$Vorzeichentabelle

Nullstellen der Ableitungsfunktion $f'(x) = 4\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

1. Wichtig sind Nullstellen des Zählers
2. $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$
3. $x_{2/3} = \pm 1$, jeweils einfach $\rightarrow$ Vorzeichenwechsel und damit Extremum jeweils $\rightarrow$Vorzeichentabelle
4. Nenner immer positiv

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Nullstellen der Ableitungsfunktion $f'(x) = 4\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

1. Wichtig sind Nullstellen des Zählers
2. $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$
3. $x_{2/3} = \pm 1$, jeweils einfach $\rightarrow$ Vorzeichenwechsel und damit Extremum jeweils $\rightarrow$Vorzeichentabelle
4. Nenner immer positiv

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
		Max		Min	

5. Koordinaten berechnen $\rightarrow$

Nullstellen der Ableitungsfunktion $f'(x) = 4\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

1. Wichtig sind Nullstellen des Zählers
2. $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$
3. $x_{2/3} = \pm 1$, jeweils einfach $\rightarrow$ Vorzeichenwechsel und damit Extremum jeweils $\rightarrow$Vorzeichentabelle
4. Nenner immer positiv

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
		Max		Min	

5. Koordinaten berechnen $\rightarrow$ in Funktion $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$ einsetzen

Nullstellen der Ableitungsfunktion $f'(x) = 4\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

1. Wichtig sind Nullstellen des Zählers
2. $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$
3. $x_{2/3} = \pm 1$, jeweils einfach $\rightarrow$ Vorzeichenwechsel und damit Extremum jeweils $\rightarrow$Vorzeichentabelle
4. Nenner immer positiv

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
		Max		Min	

5. Koordinaten berechnen $\rightarrow$ in Funktion $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$ einsetzen
6. $f(-1) = \frac{2(-2)^2}{(-1)^2+1} = \frac{8}{2} = 4$ $E_1(-1/4)$ und $f(1) = \frac{2(1-1)^2}{1^2+1} = 0$ $E_2(1/0)$

Gliederung

Grenzwerte der Funktion $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$

1. Am besten erst einmal Zähler ausmultiplizieren

Grenzwerte der Funktion $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$

1. Am besten erst einmal Zähler ausmultiplizieren
2. $f(x) = \dfrac{2(x^2 - 2x + 1)}{x^2 + 1}$

Grenzwerte der Funktion $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$

1. Am besten erst einmal Zähler ausmultiplizieren
2. $f(x) = \dfrac{2\left(x^2 - 2x + 1\right)}{x^2 + 1}$
3. Zählergrad (x^2) und Nennergrad (x^2) identisch $\rightarrow$

Grenzwerte der Funktion $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$

1. Am besten erst einmal Zähler ausmultiplizieren
2. $f(x) = \dfrac{2(x^2 - 2x + 1)}{x^2 + 1}$
3. Zählergrad (x^2) und Nennergrad (x^2) identisch $\rightarrow$ waagrechte Asymptote aus den Vorfaktoren 2 & 1
4. $y = 2$, also $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 2$

Grenzwerte der Funktion $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$

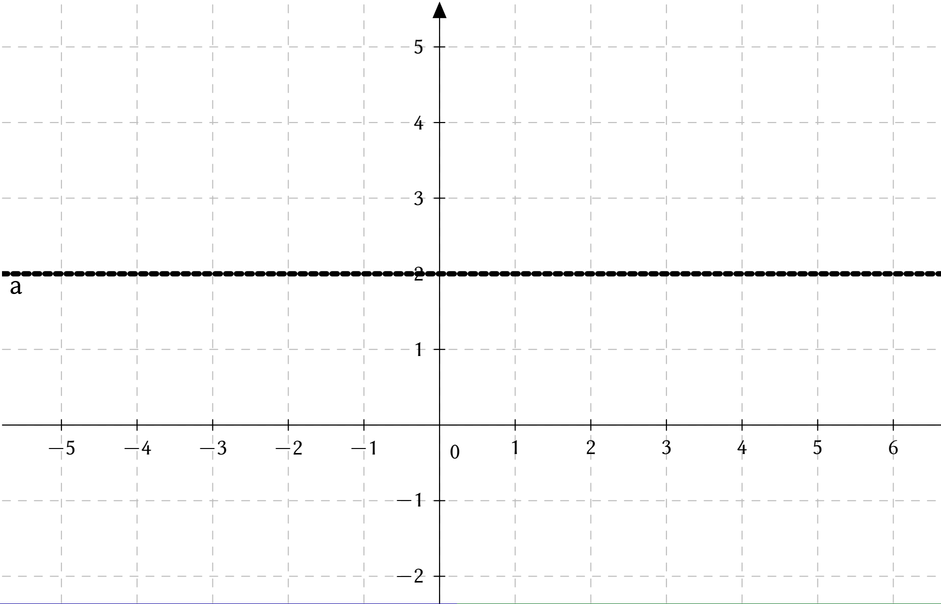
1. Am besten erst einmal Zähler ausmultiplizieren
2. $f(x) = \dfrac{2(x^2 - 2x + 1)}{x^2 + 1}$
3. Zählergrad (x^2) und Nennergrad (x^2) identisch $\rightarrow$ waagrechte Asymptote aus den Vorfaktoren 2 & 1
4. $y = 2$, also $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 2$

Grenzwertbetrachtung

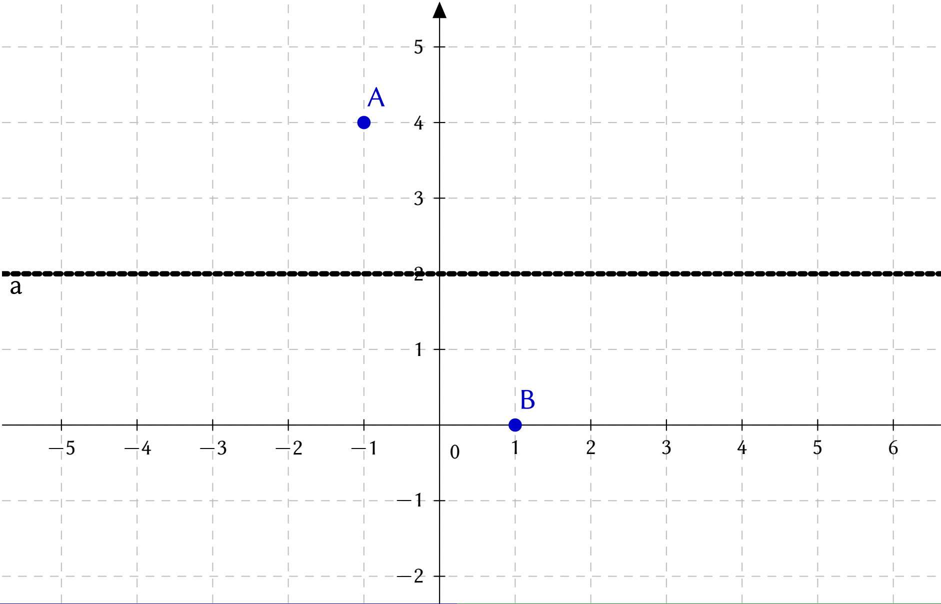
1. Für schräge Asymptoten durch x teilen
2. Vorzeichen beachten!
3. Vorfaktoren nicht vergessen!

Gliederung

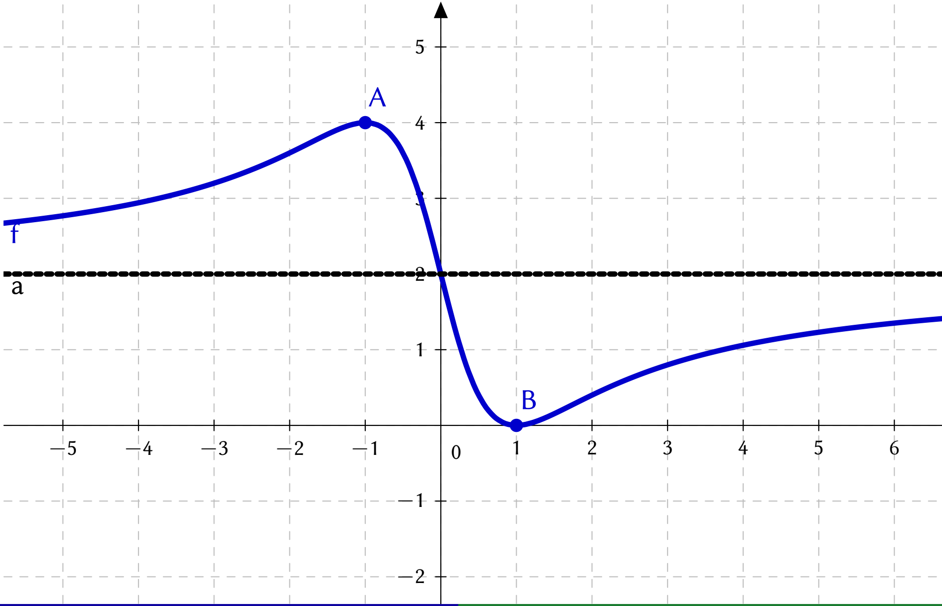
Graph von $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$ mit bisherigen Ergebnissen zeichnen



Graph von $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$ mit bisherigen Ergebnissen zeichnen



Graph von $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$ mit bisherigen Ergebnissen zeichnen



Wertemenge W_f für $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$

1. Extrema $E_1(-1/4)$ & $E_2(1/0)$

Wertemenge W_f für $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$

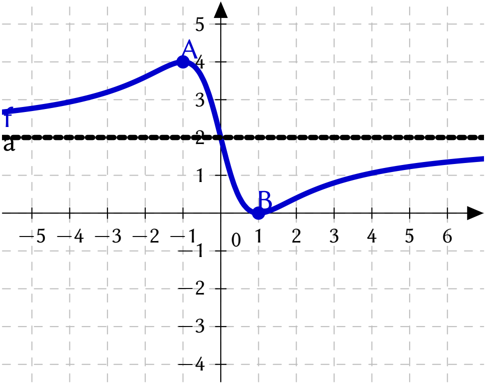
1. Extrema $E_1(-1/4)$ & $E_2(1/0)$
2. Grenzwert jeweils $y = 2$

Wertemenge W_f für $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$

1. Extrema $E_1(-1/4)$ & $E_2(1/0)$
2. Grenzwert jeweils $y = 2$
3. $W_f = [0 : 4]$, an der y-Achse ablesbar!

Wertemenge W_f für $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$

1. Extrema $E_1(-1/4)$ & $E_2(1/0)$
2. Grenzwert jeweils $y = 2$
3. $W_f = [0 : 4]$, an der y-Achse ablesbar!



Gliederung

1. **Aussagen der Funktion**
   - Nullstellen
   - Extremstellen
   - Grenzwertbetrachtung
   - Graphen zeichnen
   - Tangenfunktion

Tangenten an der Stelle $x_0 = 3$

1. x_0 in $f'(x)$ einsetzen für m

Tangenten an der Stelle $x_0 = 3$

1. x_0 in $f'(x)$ einsetzen für m
2. $f'(3) = 4\frac{3^2-1}{(3^2+1)^2} = 4\frac{8}{100} = \frac{8}{25} = 0,32$

Tangenten an der Stelle $x_0 = 3$

1. x_0 in $f'(x)$ einsetzen für m
2. $f'(3) = 4\frac{3^2-1}{(3^2+1)^2} = 4\frac{8}{100} = \frac{8}{25} = 0,32$
3. x_0 in $f(x)$ einsetzen für t

Tangenten an der Stelle $x_0 = 3$

1. x_0 in $f'(x)$ einsetzen für m
2. $f'(3) = 4\frac{3^2-1}{(3^2+1)^2} = 4\frac{8}{100} = \frac{8}{25} = 0,32$
3. x_0 in $f(x)$ einsetzen für t
4. $f(3) = \frac{2(3-1)^2}{3^2+1} = \frac{2\cdot 4}{10} = \frac{4}{5} = 0,8$

Tangenten an der Stelle $x_0 = 3$

1. x_0 in $f'(x)$ einsetzen für m
2. $f'(3) = 4\frac{3^2-1}{(3^2+1)^2} = 4\frac{8}{100} = \frac{8}{25} = 0,32$
3. x_0 in $f(x)$ einsetzen für t
4. $f(3) = \frac{2(3-1)^2}{3^2+1} = \frac{2\cdot 4}{10} = \frac{4}{5} = 0,8$
5. $y = mx + t$ mit $m = 0,32$ und $(3|0,8)$

Tangenten an der Stelle $x_0 = 3$

1. x_0 in $f'(x)$ einsetzen für m
2. $f'(3) = 4\frac{3^2-1}{(3^2+1)^2} = 4\frac{8}{100} = \frac{8}{25} = 0,32$
3. x_0 in $f(x)$ einsetzen für t
4. $f(3) = \frac{2(3-1)^2}{3^2+1} = \frac{2\cdot 4}{10} = \frac{4}{5} = 0,8$
5. $y = mx + t$ mit $m = 0,32$ und $(3|0,8)$
6. $0,8 = 0,32\cdot 3 + t \Rightarrow t = -0,16$

Tangenten an der Stelle $x_0 = 3$

1. x_0 in $f'(x)$ einsetzen für m
2. $f'(3) = 4\frac{3^2-1}{(3^2+1)^2} = 4\frac{8}{100} = \frac{8}{25} = 0,32$
3. x_0 in $f(x)$ einsetzen für t
4. $f(3) = \frac{2(3-1)^2}{3^2+1} = \frac{2\cdot4}{10} = \frac{4}{5} = 0,8$
5. $y = mx + t$ mit $m = 0,32$ und $\left(3 \middle| 0,8\right)$
6. $0,8 = 0,32 \cdot 3 + t \Rightarrow t = -0,16$
7. $y = 0,32x - 0,16$

Graph von $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$ mit bisherigen Ergebnissen zeichnen