1 Volumen & Oberfläche

Kugelvol ______	**Zylvol** ______	**Kegelvol** ______
Kugeloberfl ______	**Zyloberfl** ______	**Kegeloberfl** ______

a) Stelle das Kugelvolumen in Abhängigkeit von der Kugeloberfläche dar.

b) Die Oberfläche einer Kugel wird verdreifacht. Wie ändert sich das Volumen?

c) Vergleiche prozentual die Oberfläche des Mars mit der der Erde und erläutere mit einem Satz dein Ergebnis. **(Daten siehe Formelsammlung)**

d) Vergleiche die Volumina von Kegel und Kugel, wenn diese die identische Oberfläche besitzen.

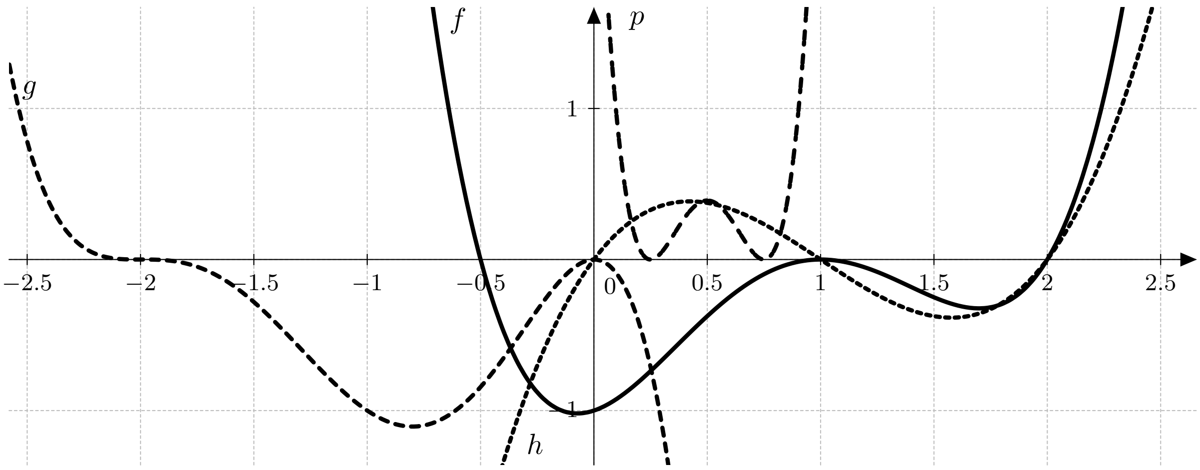
e) Berechne das Volumen einer Kugel mit Oberfläche $9,81\,\mathrm{m}^2$

2 Ganzrationale Funktionen

a) Nenne die Eigenschaften von Funktionen $f : x \mapsto x^n + 3x^{2n}$ mit $n = 2 \cdot m;\ m \in \mathbb{N}$

b) Beschreibe, wie man eine nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt $S(-2|3)$ aus der Funktionsdarstellung $f : x \mapsto x^2$ gewinnt.

c) Nenne mögliche Funktionsdarstellungen der abgebildeten Graphen



d) Erstelle mit Hilfe einer Vorzeichentabelle für $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ und der Betrachtung für sehr große Werte den Graphen G_f. **(Rechenweg muss ersichtlich sein)**

- **i)** Gib die Wertemenge $\mathbb{W}_f$ und die Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$ an.
- **ii)** Verschiebe die Funktion um 1 entlang der positiven x-Achse.

e) Untersuche $g(x) = x^4 + 3x^3 + \cos x$ auf Symmetrie.

f) Zeichne den Graphen zur Funktion $f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$.

- **i)** Gib die Wertemenge $\mathbb{W}_f$ und die Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$ an.
- **ii)** Vergleiche den Graphen der Funktion $g(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{x+2} - 1\right)$ mit G_f.

1 Volumen & Oberfläche

a) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ und $O = 4\pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{O}{4\pi}}$

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi\left(\left(\frac{O}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^3 & \text{mit } a^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{a} \\ V &= \frac{4}{3}\pi\frac{O^{\frac{3}{2}}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} & \text{mit } (a^n)^m &= a^{n\cdot m} \\ V &= \frac{4}{3}\pi\frac{O^{\frac{3}{2}}}{(4\pi)(4\pi)^{\frac{1}{2}}} & \text{mit } a^{n+m} &= a^n\cdot a^m \\ V &= \frac{O^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{\pi}} & \text{mit } (a\cdot b)^n &= a^n\cdot b^n \end{aligned}$$

b) $O_{neu} = 3\cdot O_{alt} \Rightarrow r_{neu} = \sqrt{3}r_{alt}$, da $\underbrace{4\pi\,(r_{neu})^2}_{O_{neu}} = 4\pi\left(\sqrt{3}r_{alt}\right)^2 = 3\cdot\underbrace{4\pi r_{alt}^2}_{O_{alt}}$

$\Rightarrow V_{neu} = \frac{4}{3}\pi r_{neu}^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{3}r_{alt}\right)^3 = \sqrt{3}^3\cdot\underbrace{\frac{4}{3}\pi r_{alt}^3}_{V_{alt}}$

c) $\frac{O_{Mars}}{O_{Erde}} = \frac{r_{Mars}^2}{r_{Erde}^2} = \left(\frac{r_{Mars}}{r_{Erde}}\right)^2 = \left(\frac{3396{,}2\,\mathrm{km}}{6378{,}1\,\mathrm{km}}\right)^2 = 0{,}2835$, d.h. die Oberfläche des Mars beträgt ca. 30% der Erdoberfläche.

d) /

e) $O = 4\pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{O}{4\pi}} = \sqrt{\frac{9{,}81\,\mathrm{m}^2}{4\pi}} = 0{,}884\,\mathrm{m} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\,(0{,}884\,\mathrm{m})^3 = 2{,}89\,\mathrm{m}^3$

2 Ganzrationale Funktionen

a) n ist immer gerade

- Gemeinsame Punkte
  - $f(0) = 0^n + 3\cdot 0^{2n} = 0 \Rightarrow P_1(0|0)$
  - $f(\pm1) = (\pm1)^n + 3\cdot(\pm1)^{2n} = 4 \Rightarrow P_{2/3}(\pm1|4)$
- Achsensymmetrie bzgl. y-Achse
  - $f(-x) = (-x)^n + 3\cdot(-x)^{2n} = x^n + 3x^{2n} = f(x) \quad \checkmark$
- Wertemenge und Definitionsmenge
  - $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+$
  - $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
- Steigungsverhalten
  - steigend für $x \in \mathbb{R}^+$
  - fallend für $x \in \mathbb{R}^-$

b) Der Graph wird um 2 entlang der x-Achse nach links verschoben ($f(x) = (x+2)^2$) und anschließend um 3 nach oben ($f(x) = (x+2)^2 + 3$)

c) $g(x) = -(x+2)^3 x^2$; $\quad f(x) = (x-2)(x+0{,}5)(x-1)^2$; $\quad p(x) = 100\cdot(x-0{,}75)^2(x-0{,}25)^2$;$h(x) = x\,(x-1)(x-2)$

d) Zuerst $f(x)$ in der Faktordarstellung umwandeln.

- Wertemenge $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$
- Definitionsmenge $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
- Verschiebung um 1 entlang der positiven x-Achse
  - $f_1(x) = (x-1)^3 - (x-1)^2 - 2(x-1)$

$$f(x) = x\underbrace{\left(x^2 - x - 2\right)}_{\text{Mitternachtsformel}}$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = x\,(x-2)\,(x+1)$$

		-1		0		2	
x	-	-	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	0	+
$x+1$	-	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	+	0	+	0	-	0	+

e) $g(-x) = (-x)^4 + 3\,(-x)^3 + \cos(-x) = x^4 - 3x^3 + \cos x \neq \begin{cases} g(x) & = x^4 + 3x^3 + \cos x \\ -g(x) & = -x^4 - 3x^3 - \cos x \end{cases}$

$\Rightarrow$Es liegt keine Symmetrie vor.

f) $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$; $\quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$